XXVII Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. W trójkąt równoramienny wpisano kwadrat w ten sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na podstawie tego trójkąta, a pozostałe dwa na jego bokach. Środki ciężkości kwadratu i trójkąta pokrywają się. Zatem
   a) stosunek długości podstawy trójkąta do długości boku kwadratu jest dwukrotnie większy od stosunku pola tego trójkąta do pola kwadratu,
   b) stosunek wysokości trójkąta opuszczonej na podstawę do boku kwadratu jest równy stosunkowi pola tego trójkąta do pola kwadratu,
   c) pole trójkąta jest co najmniej dwukrotnie większe od pola kwadratu.

2. Danych jest n liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ustawiając je w innej kolejności otrzymujemy liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Rozważmy liczbę
$$K = (a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n - b_n)$$
   a) Dla pewnej parzystej wartości n liczba K może być liczbą nieparzystą.
   b) Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to K jest liczbą parzystą.
   c) Dla pewnej liczby parzystej n liczba K może być liczbą parzystą.

3. Funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są funkcjami nieparzystymi.
   Rozważmy cztery funkcje:
   $h(x) = f(x) + g(x)$, $k(x) = f(x) - g(x)$, $r(x) = f(x) \cdot g(x)$, $p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
   a) Wśród rozważanych funkcji przynajmniej dwie są funkcjami parzystymi.
   b) Można podać przykład takich funkcji f i g, że dokładnie jedna z rozważanych funkcji jest funkcją parzystą.
   c) Funkcja $w(x) = k(x) \cdot r(x)$ musi być funkcją nieparzystą.

4. Rozważmy zbiór $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \max(x, y) \geqslant 1\}$, gdzie $\max(x, y)$ oznacza nie mniejszą z liczb x, y. Wówczas:
   a) żaden punkt z III ćwiartki układu współrzędnych nie należy do zbioru A,
   b) w zbiorze A znajdziemy punkty, których współrzędne spełniają nierówność $2x - 3y + 1 \leqslant 0$,
   c) wszystkie punkty, których współrzędne spełniają nierówność
$$-(x-3)^2 + 1 \leqslant 0$$
   należą do zbioru A.

5. Wiadomo, że liczba rzeczywista $z = \dfrac{|x| + y}{y - \big|1 - |x|\big|}$ jest liczbą wymierną ($y \neq \big|1 - |x|\big|$).

   Wynika stąd, że

   a) przynajmniej jedna z liczb x, y jest liczbą wymierną,
   b) liczba z jest zawsze liczbą większą od $\sqrt{2}$,
   c) dla pewnych x, y liczba z jest parzystą liczbą pierwszą.

6. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa ma długość ramion, a dłuższa długość przekątnej. Wówczas:

   a) w trapez ten można wpisać okrąg,
   b) przekątne tego trapezu mogą przecinać się pod kątem prostym,
   c) jeden z kątów wewnętrznych tego trapezu ma miarę mniejszą niż $70°$

7. Dane jest równanie z niewiadomymi x, y
$$x^4 + 6x^2y + 10y^2 + 4y + 4 = 0.$$

   a) Równanie to nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.
   b) Równanie to ma dokładnie dwie pary rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.
   c) Jedynym z rozwiązań równania jest para liczb niewymiernych.

8. Sześciokąt foremny chcemy podzielić na n przystających trapezów równoramiennych. Taki podział jest możliwy, jeśli

   a) $n = 2^{47}$,
   b) n jest dowolną wieloktotnością liczby 4,
   c) $n = 16^{134}$.

9. Funkcja $y = f(x)$, gdzie $x, f(x) \in \mathbb{R}$, jest dowolną funkcją różnowartościową.

   a) Funkcja $y = \sqrt{|f(x)|}$ może być funkcją różnowartościową.
   b) Funkcja $y = |f(x)|$ nigdy nie jest funkcją różnowartościową.
   c) Funkcja $y = 7^{f(x)}$ może nie być funkcją różnowartościową.

10. Szukamy takich liczb naturalnych n, aby liczba $1! + 2! + \ldots + n!$ była kwadratem liczby naturalnej.

   a) Dla $n \leqslant 100$ istnieją przynajmniej trzy liczby n spełniające warunki zadania.
   b) Wśród szukanych n istnieje dokładnie jedna liczba parzysta spełniająca warunki zadania.
   c) Istnieją dokładnie dwie liczby naturalne spełniające warunki zadania.

11. Rysujemy na płaszczyźnie n różnych prostych.

   a) Jeśli $n = 8$, to płaszczyzna mogła zostać podzielona na 37 części.

   b) Jeśli płaszczyzna została podzielona na 16 części, to n mogło być równe 5.

   c) Dla dowolnej nieparzystej wartości n płaszczyzna mogła zostać podzielona na parzystą liczbę części.

12. Dana jest suma

$$S_n = \left[\tfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right] + \left[\tfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right] + \ldots + \left[\tfrac{n+\sqrt{n}}{n}\right], \qquad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą liczby a.

   a) Istnieje takie $n \in (1000, 2000)$, że $S_n = 1000$.

   b) Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to S_n też jest liczbą nieparzystą.

   c) $S_{1534} < 1534$.

13. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$. Zatem:

   a) $\underbrace{f\Big(f\Big(f(\ldots(f(33))\ldots)\Big)\Big)}_{33} = 33,$

   b) $\underbrace{f\Big(f\Big(f(\ldots(f(5555))\ldots)\Big)\Big)}_{5555} = 5555,$

   c) $\underbrace{f\Big(f\Big(f(\ldots(f(321))\ldots)\Big)\Big)}_{123} = 123.$

14. W finałowym spotkaniu grało sześciu graczy, każdy z każdym. Było dokładnie 5 remisów i po podliczeniu uzyskanych punktów wyłoniono jednego zwycięzcę. Za każdą wygraną partię zawodnik otrzymywał 5 punktów, za remis 3 punkty, zaś za przegraną 0 punktów. Zatem:

   a) zwycięzca musiał wygrać przynajmniej dwie partię,

   b) każdy z graczy wygrał przynajmniej jedną partię,

   c) przynajmniej dwóch graczy musiało uzyskać taki sam wynik punktowy.

15. Spośród liczb $3, 4, 5, \ldots, 899, 900$ losujemy n liczb.

   a) Jeśli suma żadnych dwóch z nich nie dzieli się przez trzy, to n musi być liczbą mniejszą niż 300.

   b) Jeśli suma żadnych dwóch z nich nie dzieli się przez pięć, to n może być liczbą większą niż 360.

   c) Jeśli suma żadnych trzech z nich nie dzieli się przez trzy, to $n < 4$.

16. Liczby $r_1, r_2, \ldots, r_n$ są wszystkimi różnymi pierwiastkami wielomianu W.

    a) Wielomian $Q(x) = W(ax + b)$ może mieć więcej niż n różnych pierwiastków.

    b) Wielomian $P(x) = W(-x)$ może mieć dokładnie trzy takie same pierwiastki jak wielomian W.

    c) Funkcja $f(x) = W(\sqrt{x})$ może mieć dokładnie $\frac{n}{3}$ różnych miejsc zerowych.

17. Dana jest pewna funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ określony jest przez warunek $a_{n+1} = f(a_n)$, a ponadto $a_1 > f(a_1)$. Wówczas:

    a) jeśli f jest funkcją ściśle rosnącą, to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ściśle malejącym,

    b) jeśli f jest funkcją ściśle malejącą, to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ściśle rosnącym,

    c) jeśli f jest funkcją ograniczoną, to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym.

18. Niech x_n oznacza mniejszy, a y_n większy pierwiastek równania
$$nx^2 - 3nx + 2 = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Wtedy:

    a) choć jeden z ciągów $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do nieskończoności,

    b) choć jeden z ciągów $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do zera,

    c) choć jeden z ciągów $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie ma granicy.

19. Każda z dwóch funkcji kwadratowych
$$f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \qquad f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$
ma dwa miejsca zerowe.
Definiujemy funkcję f wzorem $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Wówczas:

    a) funkcja f ma nie więcej niż dwa miejsca zerowe,

    b) funkcja f może nie mieć miejsc zerowych,

    c) dla każdego $t \in < 0, 1 >$, funkcja $g(x) = tf_1(x) + (1-t)f_2(x)$ ma dokładnie dwa różne miejsca zerowe.

20. Zdaniem prawdziwym jest zdanie:

    a) Liczba $2 - \sqrt[3]{2}$ jest pierwiastkiem pewnego wielomianu trzeciego stopnia o współczynnikach całkowitych.

    b) Każda liczba postaci $\sqrt[5]{a + \sqrt{b}}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$, jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych i współczynniku przy najwyższej potędze równym 1.

    c) Każda liczba postaci $\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{b}}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$, jest pierwiastkiem pewnego wielomianu stopnia co najwyżej n^2 o współczynnikach całkowitych.