XXVIII Rozkosze Łamania Głowy

**konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych**

zestaw **A**

1. Niech $p$ i $q$ będą zdaniami. W zdaniu:
$$(\star) \qquad (\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \boxed{?} q)$$
brakuje spójnika. Do dyspozycji mamy cztery spójniki: $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Wtedy:
   a) spośród tych czterech spójników można wybrać i wstawić w miejsce znaku zapytania taki spójnkik, że zdanie $(\star)$ będzie tautologią,
   b) spośród tych czterech spójników można wybrać i wstawić w miejsce znaku zapytania taki spójnik, że dla każdych wartości zdań $p$ i $q$ zdanie $(\star)$ będzie zdaniem fałszywym,
   c) jeśli zdania $p$ i $q$ są zdaniami fałszywymi, to bez względu na wybór spójnika zdanie $(\star)$ będzie zdaniem fałszywym,

2. Liczba całkowita $a$ przy dzieleniu przez $k$ ($k \in \mathbb{N}$) daje resztę 3, zaś liczba całkowita $b$ przy dzieleniu przez $k$ daje resztę 4. Wówczas jeśli $k$ jest liczbą:
   a) nieparzystą większą od 6, to przy dzieleniu $ab$ przez $k$ można uzyskać resztę 7 lub resztę 13,
   b) nieparzystą większą od 6, to reszta z dzielenia $ab$ przez $k$ zawsze jest liczbą nieparzystą,
   c) parzystą większą od 6, to można przy dzieleniu $ab$ przez $k$ otrzymać resztę będącą liczbą pierwszą.

3. Wiadomo, że zdanie $(p \Rightarrow (\sim (p \Rightarrow q)))$ jest fałszywe. Wtedy:
   a) $p$ może być zdaniem prawdziwym,
   b) $q$ może być zdaniem prawdziwym,
   c) $p$ i $q$ są zdaniami fałszywymi.

4. O funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wiadomo, że jest funkcją nieparzystą. Wówczas:
   a) jeśli $f$ jest funkcją rosnącą w $\mathbb{R}_+$, to jest rosnąca również w $\mathbb{R}_-$,
   b) jeśli $f$ jest funkcją malejącą w $\mathbb{R}_+$, to w $\mathbb{R}_-$ jest funkcją rosnącą,
   c) jeśli $f$ jest funkcją malejącą w $\mathbb{R}_+$, to jest malejąca w całej swojej dziedzinie.

5. Niech $a$ będzie liczbą rzeczywistą nieujemną. Układ równań:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

może dla pewnej wartości $a$ mieć dokładnie:

a) 2 rozwiązania,

b) 4 rozwiązania,

c) 8 rozwiązań.

6. Funkcja $f$ dana jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Jeśli dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek

a) $af(\alpha) < 0$, to $f$ ma przynajmniej jedno miejsce zerowe,

b) $af(\alpha) > 0$, to $f$ nie ma miejsca zerowego,

c) $af(\alpha) < 0$, to $f$ ma dwa różne miejsca zerowe.

7. Niech $h_1$ i $h_2$ będą wysokościami równoległoboku o polu $S$. Wtedy:

a) $\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{S}}$,

b) $\dfrac{2}{h_1 + h_2} \leqslant \dfrac{\sqrt{S}}{h_1 h_2} \leqslant 1$,

c) $h_1 h_2 \leqslant S$.

8. Funkcja $f(x) = x^4 - x^2 - 2x - 5$ przyjmuje najmniejszą wartość

a) dla $x \in < 0, \frac{1}{2} >$,

b) dla pewnej liczby niewymiernej $x \in (\frac{1}{2}, 1 >$ i wartość ta jest liczbą mniejszą niż $-6$,

c) dla pewnej liczby wymiernej $x \in (\frac{1}{2}, 1 >$ i wartość ta jest liczbą mniejszą niż $-6$.

9. Ze zbioru wierzchołków sześcianu wybieramy 3 wierzchołki. Każda taka trójka wierzchołków wyznacza pewnien trójkąt. Niech $r$ – oznacza ilość otrzymanych w ten sposób trójkątów równobocznych, $p$ – ilość trójkątów równoramiennych nie będących trójkątami równoboczbymi, zaś $s$ – ilość trójkątów o parami różnych bokach. Wówczas:

a) $r \leqslant s \leqslant p$,

b) $r \leqslant p \leqslant s$,

c) $s \leqslant p \leqslant r$.

10. Niech $y \geqslant 0$. Rozważmy liczby postaci:

$$z = tx + \sqrt{y}, \text{ dla } t \in \mathbb{R}.$$

a) Jeśli $y$ nie jest kwadratem liczby wymiernej, to $z$ musi być liczbą niewymierną,

b) Jeśli $x$ jest liczbą wymierną, to $z$ musi być liczbą niewymierną,

c) Jeśli $y$ jest kwadratem liczby wymiernej, to $z$ musi być liczbą wymierną.

11. Rzutem prostokątnym czworościonu na płaszczyznę może być:

a) pięciokąt,

b) trapez,

c) równoległobok.

12. Liczby naturalne $a, b$ są liczbami względnie pierwszymi. Wtedy względnie pierwszymi są liczby:

a) $5a + 3b$ oraz $8a + 5b$,

b) $a + b$ oraz $a^2 + ab + b^2$,

c) $4a + 8b$ oraz $a + 5b$.

13. Jeśli dla boków $a, b, c$ trójkąta zachodzi nierówność $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$, to trójkąt ten:

a) może być trójkątem rozwartokątnym,

b) może być trójkątem prostokątnym,

c) musi być trójkątem ostrokątnym.

14. W trójkącie $ABC$ dwusieczne $BP$ i $CT$ przecinają się w punkcie $O$. Wiadomo, że punkty $A, P, O$ i $T$ należą do jednego okręgu. Zatem:

a) trójkąt $ABC$ może być trójkątem równobocznym,

b) kąt $BAC$ ma miarę $60°$,

c) wierzchołek $B$ może leżeć na okręgu wyznaczonym przez punkty $A, P, T$.

15. Rozważmy zbiór $A = \{n, n+1, n+2, \ldots, n+29\}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Dla pewnej liczby naturalnej $n$ w zbiorze $A$ może być dokładnie 12 liczb pierwszych.

b) Istnieją dokładnie dwie liczby naturalne $n$, dla których w zbiorze $A$ jest dokładnie 9 liczb pierwszych.

c) Dla pewnej liczby naturalnej $n \in < 100, 200 >$ w zbiorze $A$ jest dokładnie 9 liczb pierwszych.

16. Wartość wyrażenia $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

   a) jest liczbą niewymierną,

   b) jest liczbą mniejszą niż 0,25,

   c) jest liczbą wymierną większą niż 0,12.

17. Niech $n$ będzie liczbą naturalną większą niż 1. Rozważmy zapis dziesiętny liczby $n!$. Wówczas:

   a) jeśli $n = 103$, to ostatnią niezerową cyfrą liczby $n!$ w jej zapisie dziesiętnym jest 8,

   b) dla $n = 105$ zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się 25 zerami,

   c) dla $n = 100$ zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się 20 zerami.

18. Niech $f(x) = ax + b$. Funkcja $g(x) = \dfrac{1 + af(x)}{1 - bf(x)}$

   a) dla pewnych wartości rzeczywistych $a, b$ może być funkcją parzystą,

   b) dla pewnych wartości rzeczywistych $a, b$ może być funkcją nieparzystą,

   c) ma zawsze jedno miejsce zerowe.

19. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{\sin n}{n!}$

   a) nie posiada granicy,

   b) jest ograniczony,

   c) ma granicę skończoną.

20. Dla dowolnego kąta $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ prawdziwa jest nierówność:

   a) $\cos(\sin\alpha) > \sin(\cos\alpha)$,

   b) $\cos(\sin\alpha) < \sin(\cos\alpha)$,

   c) $\cos(\cos\alpha) > \sin(\sin\alpha)$.

XXVIII Rozkosze Łamania Głowy

**konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych**

$\boxed{\text{zestaw } \mathbf{B}}$

1. Niech $p$ i $q$ będą zdaniami. W zdaniu:
$$(\star) \qquad (\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \boxed{?} q)$$
brakuje spójnika. Do dyspozycji mamy cztery spójniki: $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Wtedy:
   a) spośród tych czterech spójników można wybrać i wstawić w miejsce znaku zapytania taki spójnkik, że zdanie $(\star)$ będzie tautologią,
   b) jeśli zdania $p$ i $q$ są zdaniami prawdziwymi, to bez względu na wybór spójnika zdanie $(\star)$ będzie zdaniem prawdziwym,
   c) jeśli zdania $p$ i $q$ są zdaniami fałszywymi, to bez względu na wybór spójnika zdanie $(\star)$ będzie zdaniem fałszywym,

2. Liczba całkowita $a$ przy dzieleniu przez $k$ ($k \in \mathbb{N}$) daje resztę 3, zaś liczba całkowita $b$ przy dzieleniu przez $k$ daje resztę 4. Wówczas jeśli $k$ jest liczbą:
   a) nieparzystą większą od 6, to przy dzieleniu $ab$ przez $k$ można uzyskać resztę 7 lub resztę 13,
   b) nieparzystą większą od 6, to reszta z dzielenia $ab$ przez $k$ zawsze jest liczbą nieparzystą,
   c) parzystą większą od 6, to można przy dzieleniu $ab$ przez $k$ otrzymać resztę będącą liczbą pierwszą.

3. Wiadomo, że zdanie $(p \Rightarrow (\sim (\sim q \Rightarrow p)))$ jest fałszywe. Wtedy:
   a) $p$ może być zdaniem prawdziwym,
   b) $q$ może być zdaniem fałszywym,
   c) $p$ i $q$ są zdaniami prawdziwymi.

4. O funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wiadomo, że jest funkcją parzystą. Wówczas:
   a) jeśli $f$ jest funkcją rosnącą w $\mathbb{R}_+$, to w $\mathbb{R}_-$ też jest funkcją rosnącą,
   b) jeśli $f$ jest funkcją malejącą w $\mathbb{R}_+$, to w $\mathbb{R}_-$ jest funkcją rosnącą,
   c) jeśli $f$ jest funkcją malejącą w $\mathbb{R}_+$ i dla $x = 0$ przyjmuje wartość 0, to zbiór wartości funkcji $f$ zawiera sie w przedziale $< 0, +\infty)$.

5. Niech $a$ będzie liczbą rzeczywistą nieujemną. Układ równań:

$$\begin{cases} |x-3|+|y|=4 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

może dla pewnej wartości $a$ mieć dokładnie:

a) 2 rozwiązania,

b) 3 rozwiązania,

c) 4 rozwiązania.

6. Funkcja $f$ dana jest wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$. Jeśli dla pewnego $\alpha\in\mathbb{R}$ spełniony jest warunek

a) $af(\alpha)=0$, to $f$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe,

b) $af(\alpha)>0$, to $f$ nie ma miejsca zerowego,

c) $af(\alpha)<0$, to $f$ ma dwa różne miejsca zerowe.

7. Niech $h_1$ i $h_2$ będą wysokościami równoległoboku o polu $S$. Wtedy:

a) $\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{S}}$,

b) $\dfrac{2}{h_1+h_2}\leqslant\dfrac{\sqrt{S}}{h_1h_2}\leqslant 1$,

c) $h_1h_2\leqslant S$.

8. Funkcja $f(x)=x^4-x^2+2x-7$ przyjmuje najmniejszą wartość

a) dla $x\in(-\frac{1}{2},1>$,

b) dla pewnej liczby niewymiernej $x\in<-1,-\frac{1}{2}>$ i wartość ta jest liczbą mniejszą niż $-8$,

c) dla pewnej liczby wymiernej $x\in<-1,-\frac{1}{2}>$ i wartość ta jest liczbą mniejszą niż $-8$.

9. Ze zbioru wierzchołków sześcianu wybieramy 3 wierzchołki. Każda taka trójka wierzchołków wyznacza pewnien trójkąt. Niech $r$ – oznacza ilość otrzymanych w ten sposób trójkątów równoboczbych, $p$ – ilość trójkątów równoramiennych nie będących trójkątami równobocznymi, zaś $s$ – ilość trójkątów o parami różnych bokach. Wówczas:

a) $r\leqslant s\leqslant p$,

b) $p\leqslant r\leqslant s$,

c) $s\leqslant p\leqslant r$.

10. Niech $y \geqslant 0$. Rozważmy liczby postaci:
$$z = tx + \sqrt{y}, \text{ dla } t \in \mathbb{R}.$$

a) Jeśli $y$ nie jest kwadratem liczby wymiernej, to $z$ musi być liczbą niewymierną,

b) Jeśli $x$ jest liczbą wymierną, to $z$ musi być liczbą niewymierną,

c) Jeśli $y$ jest kwadratem liczby wymiernej, to $z$ musi być liczbą wymierną.

11. Rzutem prostokątnym czworościonu na płaszczyznę może być:

a) kwadrat,

b) trapez,

c) pieciokąt.

12. Liczby naturalne $a, b$ są liczbami względnie pierwszymi. Wtedy względnie pierwszymi są liczby:

a) $8a + 5b$ oraz $13a + 8b$,

b) $a - b$ oraz $a - ab + b^2$,

c) $4a + 8b$ oraz $5a + 13b$.

13. Jeśli dla boków $a, b, c$ trójkąta zachodzi nierówność $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$, to trójkąt ten:

a) może być trójkątem równoramiennym rozwartokątnym,

b) musi być trójkątem prostokątnym,

c) może być trójkątem ostrokątnym o parami różnych bokach.

14. W trójkącie $ABC$ dwusieczne $BP$ i $CT$ przecinają się w punkcie $O$. Wiadomo, że punkty $A, P, O$ i $T$ należą do jednego okręgu. Zatem:

a) trójkąt $ABC$ może być trójkątem równobocznym,

b) kąt $BAC$ może mieć miarę mniejszą niż $60°$,

c) wierzchołek $C$ może leżeć na okręgu wyznaczonym przez punkty $A, P, T$.

15. Rozważmy zbiór $A = \{n, n+1, n+2, \ldots, n+29\}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Istnieją dokładnie dwie liczby naturalne $n$, dla których w zbiorze $A$ jest dokładnie 11 liczb pierwszych.

b) Dla pewnej liczby naturalnej $n \in < 200, 300 >$ w zbiorze $A$ jest dokładnie 9 liczb pierwszych.

c) Dla pewnej liczby naturalnej $n \leqslant 23$ w zbiorze $A$ może być dokładnie 12 liczb pierwszych.

16. Wartość wyrażenia $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

   a) jest liczbą niewymierną,

   b) jest liczbą mniejszą niż 0,25,

   c) jest liczbą wymierną większą niż 0,12.

17. Niech $n$ będzie liczbą naturalną większą niż 1. Rozważmy zapis dziesiętny liczby $n!$. Wówczas:

   a) jeśli $n = 107$, to ostatnią niezerową cyfrą liczby $n!$ w jej zapisie dziesiętnym jest 4,

   b) dla $n = 125$ zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się 31 zerami,

   c) dla $n = 200$ zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się 40 zerami.

18. Niech $f(x) = ax + b$. Funkcja $g(x) = \dfrac{2 - bf(x)}{1 + af(x)}$

   a) dla pewnych wartości rzeczywistych $a, b$ może być funkcją parzystą,

   b) dla pewnych wartości rzeczywistych $a, b$ może być funkcją nieparzystą,

   c) ma zawsze jedno miejsce zerowe.

19. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{\cos n}{n!}$

   a) nie posiada granicy,

   b) jest monotoniczny,

   c) ma granicę będącą liczbą niewymierną.

20. Dla dowolnego kąta $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ prawdziwa jest nierówność:

   a) $\cos(\sin\alpha) > \sin(\cos\alpha)$,

   b) $\sin(\cos\alpha) < \cos(\cos\alpha)$,

   c) $\cos(\cos\alpha) > \sin(\sin\alpha)$.

# XXVIII Rozkosze Łamania Głowy

Katowice, 29 marca 2006

## Część I

**1.** Niech $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech $Z$ będzie dowolnym niepustym podzbiorem zbioru $A$. Rozstrzygnąć prawdziwość następujących zdań:

(A) ☐ Jeżeli zbiór ograniczeń dolnych zbioru $Z$ jest niepusty, to istnieje kres dolny tego podzbioru.

(B) ☐ Jeżeli zbiór ograniczeń dolnych zbioru $Z$ jest jednoelementowy, to istnieje kres dolny tego podzbioru.

(C) ☐ Jeżeli zbiór ograniczeń górnych zbioru $Z$ jest skończony, to istnieje kres górny tego podzbioru.

(D) ☐ Jeżeli zbiór ograniczeń górnych zbioru $Z$ jest nieskończony, to nie istnieje kres górny tego podzbioru.

**2.** Rozstrzygnąć prawdziwość następujących zdań:

(A) ☐ Każdy skończony zbiór częściowo uporządkowany jest kratą.

(B) ☐ Każda skończona krata ma element największy.

(C) ☐ Każda krata ma element najmniejszy.

(D) ☐ Każda krata jest zbiorem liniowo uporządkowanym.

**3.** Rozważmy rodzinę $R$ wszystkich skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ z relacją $\sqsubseteq$ określoną dla dowolnych $X$, $Y$ należących do $R$ następująco:

$$X \sqsubseteq Y \iff \text{dla dowolnego } x \in \mathbb{N} \quad \text{jeżeli } x \notin Y, \text{ to } x \notin X.$$

Niech $\mathcal{A} = (R, \sqsubseteq)$. Wówczas

(A) ☐ $\mathcal{A}$ jest kratą rozdzielną.

(B) ☐ $\mathcal{A}$ jest kratą, ale nie jest kratą rozdzielną.

(C) ☐ $\mathcal{A}$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, ale nie jest kratą.

(D) ☐ $\mathcal{A}$ nie jest zbiorem częściowo uporządkowanym.

**4.** Rozstrzygnąć prawdziwość następujących zdań:

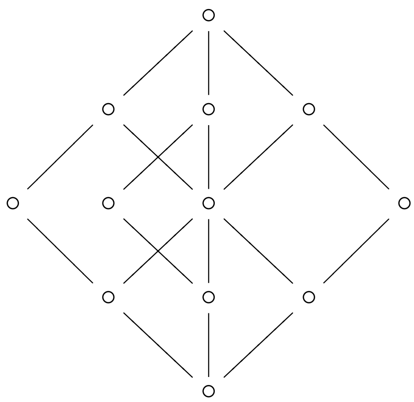
(A) ☐ Każda krata zawiera, jako swoją podkratę, pewną kratę rozdzielną.

(B) ☐ Każda krata rozdzielna ma element największy i najmniejszy.

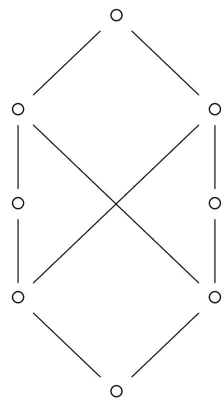
(C) ☐ Każdy zbiór liniowo uporządkowany jest kratą rozdzielną.

(D) ☐ Każda krata o co najwyżej czterech elementach jest kratą rozdzielną.

**5.** Dane są diagramy zbiorów częściowo uporządkowanych $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$:



$\mathcal{A}$



$\mathcal{B}$

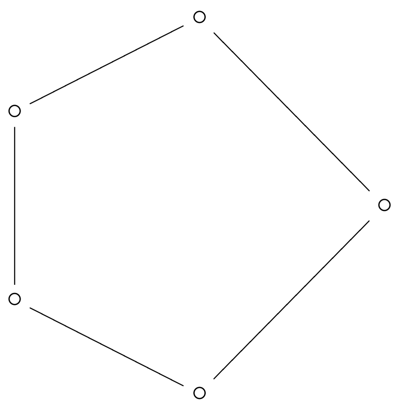
(A) ☐ $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są kratami.

(B) ☐ Tylko $\mathcal{B}$ jest kratą.

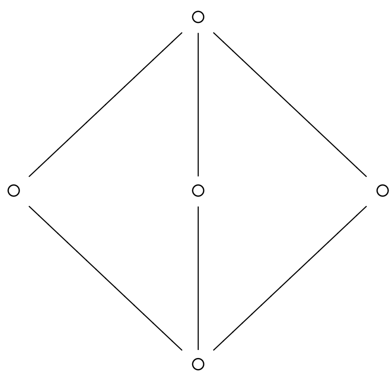
(C) ☐ Tylko $\mathcal{A}$ jest kratą.

(D) ☐ Ani $\mathcal{A}$ ani $\mathcal{B}$ nie jest kratą.

**6.** Przypominamy, że kraty $\mathcal{L}_5$ i $\mathcal{L}_6$ reprezentowane są przez następujące diagramy.

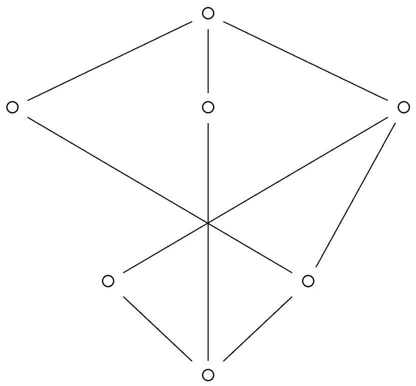


$\mathcal{L}_5$

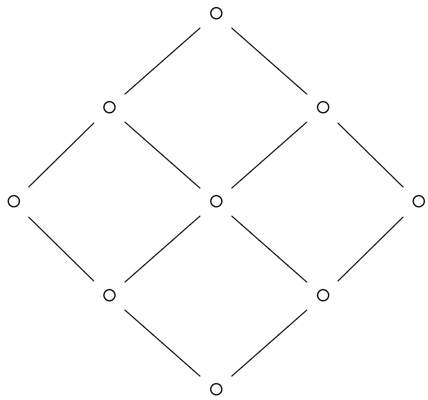


$\mathcal{L}_6$

Dane są kraty $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$:



$\mathcal{K}$



$\mathcal{M}$

Zaznaczyć zdania prawdziwe.

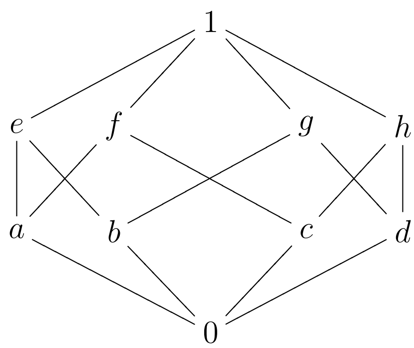
(A) ☐ $\mathcal{K}$ zawiera $\mathcal{L}_5$ jako swoją podkratę.

(B) ☐ $\mathcal{M}$ zawiera $\mathcal{L}_5$ jako swoją podkratę.

(C) ☐ $\mathcal{K}$ zawiera $\mathcal{L}_6$ jako swoją podkratę.

(D) ☐ $\mathcal{M}$ zawiera $\mathcal{L}_6$ jako swoją podkratę.

**7.** Dana jest krata




Wówczas,

(A) ☐ $(a \wedge (d \vee f)) \vee c = a$

(B) ☐ $(a \wedge (d \vee f)) \vee c = a \vee c$

(C) ☐ $(a \wedge (d \vee f)) \vee c = f$

(D) ☐ $(a \wedge (d \vee f)) \vee c = a \vee d$

**8.** Krata $\mathcal{K}$ zadana jest za pomocą następujących tabel:

| $\wedge$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | 0 | $a$ | 0 | 0 | $a$ |
| $b$ | 0 | 0 | $b$ | 0 | $b$ |
| $c$ | 0 | 0 | 0 | $c$ | $c$ |
| 1 | 0 | $a$ | $b$ | $c$ | 1 |

| $\vee$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $a$ | $b$ | $c$ | 1 |
| $a$ | $a$ | $a$ | 1 | 1 | 1 |
| $b$ | $b$ | 1 | $b$ | 1 | 1 |
| $c$ | $c$ | 1 | 1 | $c$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Które z poniższych związków zachodzą w kracie $\mathcal{K}$?

(A) ☐ $a \wedge b = a \wedge c$

(B) ☐ $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge b) \vee c$

(C) ☐ $a \wedge (b \vee c) = 0$

(D) ☐ $a \vee (b \vee c) = 1$

## Część II

**1.** Udowodnić, że zbiór liczb naturalnych dodatnich z relacją podzielności jest kratą. Zbadać, czy jest to krata rozdzielna.

**2.** Podać przykłady

(A) kraty bez elementu najmniejszego, ale z elementem największym;

(B) kraty rozdzielnej bez elementu najmniejszego i największego.

Uzasadnić poprawność swojego wyboru.