XXXII Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

$\boxed{\text{zestaw } \mathbf{A}}$

1. Istnieje liczba rzeczywista x, dla której istnieją jednocześnie wartości rzeczywiste pierwiastków:

   a) $\sqrt{x-1}$ i $\sqrt{-x+1}$,

   b) $\sqrt[3]{x-2}$ i $\sqrt[4]{1-x}$,

   c) $\sqrt{\sqrt{3}x+1}$ i $\sqrt{\sqrt{2}-x}$.

2. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Wtedy:

   a) istnieje taka niecałkowita liczba a, że $[a] = 2[a]$,

   b) jeśli a jest liczbą całkowitą nieparzystą, to $2[\frac{a}{2}] = [a]$

   c) $[x] = [x-1] + 1$.

3. Dwie cięciwy okręgu AB i CD przecinają się w punkcie P. Prawdziwa jest więc równość:

   a) $|AP| \cdot |PB| = |CP| \cdot |PD|$,

   b) $|AP| \cdot |CP| = |PD| \cdot |PB|$,

   c) $|AP| \cdot |PD| = |CP| \cdot |PB|$.

4. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki $f(1) = 3$ oraz $f(x) = f(x-1) + 4$. Zatem:

   a) f może miec wzór $f(x) = 4x - 1$,

   b) istnieje tylko jedna funkcja f spełniająca podane warunki,

   c) istnieje tylko jedna funkcja liniowa f spełniająca podane warunki.

5. Rozważmy trójkąt, którego wysokości mają długości 1, 2 i 3.

   a) trójkąt ten mógł być rozwartokątny,

   b) trójkąt ten mógł być ostrokątny,

   c) nie istnieje taki trójkąt.

6. Układ równań:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \end{cases}$$

   a) ma rozwiązanie w zbiorze liczb całkowitych,

   b) ma rozwiązanie w zbiorze liczb wymiernych,

   c) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

7. Wiadomo, że liczba $2n^3+n^2$ jest podzielna przez 6. Zatem:

   a) n jest podzielne przez 9,

   b) n jest podzielne przez 12,

   c) n jest podzielne przez 18.

8. W trójkącie prostokatnym o przyprostokątnych a i b wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość:

   a) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

   b) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$,

   c) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

9. Układ równań:

$$\begin{cases} x+|y|=2 \\ x-|x-1|=1 \end{cases}$$

   a) nie ma takich rozwiązań, w których $x \leqslant 1$,

   b) ma przynajmniej cztery takie rozwiązania, że $x \in (1,2)$,

   c) ma mniej niż osiem takich rozwiązań, że $x \in (1,2)$.

10. Dana jest liczba sześciocyfrowa $x=\overline{ABCABC}$, gdzie $\overline{ABCABC}$ oznacza zapis dziesiętny liczby o cyfrach A, B, C, A, B, C.

   a) liczba x ma dokładnie trzy różne dzielniki pierwsze będące kolejnymi liczbami pierwszymi,

   b) liczba x ma przynajmniej cztery różne dzielniki pierwsze,

   c) liczba x może być kwadratem liczby naturalnej.

11. Niech a oznacza liczbę nieskracalnych ułamków właściwych o mianowniku 244, zaś b – liczbę nieskracalnych ułamków właściwych o mianowniku 279. Wtedy:

    a) $a < 120$,

    b) $b < 179$,

    c) $a < b + 57$.

12. W trójkącie ABC z wierzchołka A poprowadzono środkową, której długość jest dwa razy mniejsza od długości boku, do którego została poprowadzona. Zatem trójkąt ABC jest:

    a) równoramienny,

    b) prostokątny,

    c) równoboczny.

13. Suma długości przekątnych rombu jest równa m a obwód rombu wynosi n. Zatem:

    a) pole rombu wynosi $\dfrac{4m^2 - n^2}{16}$,

    b) pole rombu wynosi $\dfrac{m^2 - n^2}{4}$,

    c) musi być spełniona nierówność $n > m$.

14. Funkcja $f(x) = |x|$ spełnia warunek:

    a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

    b) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$,

    c) $f(x - y) \leqslant f(x) + f(y)$.

15. W trapezie $ABCD$ podstawy mają długość $|AB| = a$ i $|CD| = b$, gdzie $a > b$. Suma miar kątów wewnętrznych przy podstawie jest równa $90°$. Długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu jest równa:

    a) $\dfrac{a + b}{4}$,

    b) $a - b$,

    c) $\dfrac{a - b}{2}$.

16. Równanie $x^2 + mx + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiaski x_1 i x_2. Zatem:

a) $(x_1 + x_2)^2 \geqslant 4$,

b) $x_1 + x_2 \geqslant 2$,

c) $x_1 + x_2 > -2$.

17. Niech $\overline{0,xyz}$ oznacza liczbę, w której x oznacza cyfrę części dziesiętnych, y – cyfrę części setnych, z – części tysięcznych. Ponadto $x \neq y \neq z$. Równanie $\overline{0,xyz} + \overline{0,zyx} = 1$ ma:

a) dokładnie jedno rozwiązania,

b) co najwyżej dwa rozwiązania,

c) co najwyżej dwa rozwiązania, w których x jest cyfrą parzystą.

18. Niech $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach rzeczywistych i niech $f(x) = \sqrt{W(x)}$.

a) dla $n = 7$ dziedziną funkcji f może być zbiór liczb rzeczywistych,

b) dla pewnego n dziedziną może być zbiór pusty,

c) jedynie dla $n = 1$ dziedziną funkcji może być przedział $< c, +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

19. Siatka pewnego czworościanu może być:

a) trójkątem równobocznym,

b) trójkatem różnobocznym,

c) kwadratem.

20. Dany jest wielomian $W(x) = (2x^2 - 1)^{2010} \cdot (x^3\sqrt{7} - x - \sqrt{7})^{2010}$. Suma współczynników tego wielomianu:

a) jest liczbą niewymierną,

b) jest liczbą całkowitą,

c) jest liczbą naturalną.

XXXII Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

$\boxed{\text{zestaw } \mathbf{B}}$

1. Załóżmy, że wysokości pewnego trójkąta mają długości 1, 2 i 3. Zatem:

   a) trójkąt ten mógł być rozwartokątny,

   b) trójkąt ten mógł być ostrokątny,

   c) nie istnieje taki trójkąt.

2. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Wtedy:

   a) jeśli a jest liczbą całkowitą nieparzystą, to $2[\frac{a}{2}] = [a]$

   b) istnieje taka niecałkowita liczba a, że $[a] = 2[a]$,

   c) $[x+1] = [x] + 1$.

3. Przedłużenia dwóch cięciw okręgu PQ i MN przecinają się w punkcie A. Prawdziwa jest więc równość:

   a) $|PA| \cdot |AQ| = |MA| \cdot |AN|$,

   b) $|PA| \cdot |MA| = |AN| \cdot |AQ|$,

   c) $|PA| \cdot |AN| = |MA| \cdot |AQ|$.

4. Istnieje liczba rzeczywista x, dla której istnieją jednocześnie wartości rzeczywiste pierwiastków:

   a) $\sqrt{-x-1}$ i $\sqrt{x+1}$,

   b) $\sqrt[6]{x-3}$ i $\sqrt[3]{2-x}$,

   c) $\sqrt{\sqrt{3}x+1}$ i $\sqrt{\sqrt{3}-2x}$.

5. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki $f(1) = 3$ oraz $f(x) = f(x-1) + 4$. Zatem:

   a) istnieje tylko jedna funkcja liniowa f spełniająca podane warunki,

   b) istnieje tylko jedna funkcja f spełniająca podane warunki,

   c) f może mieć wzór $f(x) = 4x - 1$.

6. W trapezie $ABCD$ podstawy mają długość $|AB| = a$ i $|CD| = b$, gdzie $a > b$. Suma miar kątów wewnętrznych przy podstawie jest równa $90°$. Długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu jest równa:

   a) $a - b$,

   b) $\frac{a+b}{4}$,

   c) $\frac{a-b}{2}$.

7. Wiadomo, że liczba $2n^3 + n^2$ jest podzielna przez 14. Zatem:

   a) n jest podzielne przez 4,

   b) n jest podzielne przez 28,

   c) n jest podzielne przez 49.

8. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość:

   a) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$,

   b) $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

   c) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$.

9. Układ równań:

$$\begin{cases} x + |y| = 2 \\ x - |x-1| = 1 \end{cases}$$

   a) ma przynajmniej cztery takie rozwiązania, że $x \in (1, 2)$,

   b) nie ma takich rozwiązań, w których $x \leqslant 1$,

   c) ma mniej niż osiem takich rozwiązań, że $x \in (1, 2)$.

10. Funkcja $f(x) = |x|$ spełnia warunek:

   a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

   b) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$,

   c) $f(x - y) \leqslant f(x) + f(y)$.

11. Niech a oznacza liczbę nieskracalnych ułamków właściwych o mianowniku 244, zaś b – liczbę nieskracalnych ułamków właściwych o mianowniku 279. Wtedy:

   a) $a < 120$,

   b) $b < 179$,

   c) $a < b + 57$.

12. Dana jest liczba sześciocyfrowa $x = \overline{ABCABC}$, gdzie $\overline{ABCABC}$ oznacza zapis dziesiętny liczby o cyfrach A, B, C, A, B, C.

   a) liczba x ma dokładnie trzy różne dzielniki pierwsze będące kolejnymi liczbami pierwszymi,

   b) liczba x ma przynajmniej cztery różne dzielniki pierwsze,

   c) liczba x może być kwadratem liczby naturalnej.

13. W trójkącie ABC z wierzchołka A poprowadzono środkową, której długość jest dwa razy mniejsza od długości boku, do którego została poprowadzona. Zatem trójkąt ABC jest:

   a) równoboczny,

   b) prostokątny,

   c) równoramienny.

14. Układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

   a) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych,

   b) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb wymiernych,

   c) ma co najmniej 7 rozwiązań.

15. Suma długości przekątnych rombu jest równa m a obwód rombu wynosi n. Zatem:

   a) zawsze prawdziwa jest nierówność $m > n$.

   b) pole rombu wynosi $\dfrac{4m^2 - n^2}{16}$,

   c) pole rombu wynosi $\dfrac{m^2 - n^2}{4}$.

16. Dany jest wielomian $W(x) = (3x^3 - 2)^{2010} \cdot (x^3\sqrt{6} + x - \sqrt{6})^{2010}$. Suma współczynników tego wielomianu:

  a) jest liczbą niewymierną,

  b) jest liczbą całkowitą,

  c) jest liczbą naturalną.

17. Równanie $x^2 + mx + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiaski x_1 i x_2. Zatem:

  a) $(x_1 + x_2)^2 \geqslant 4$,

  b) $x_1 + x_2 \geqslant 2$,

  c) $x_1 + x_2 \geqslant -2$.

18. Niech $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach rzeczywistych i niech $f(x) = \sqrt{W(x)}$.

  a) dla $n = 7$ dziedziną funkcji f może być zbiór liczb rzeczywistych,

  b) dla pewnego n dziedziną może być zbiór pusty,

  c) jedynie dla $n = 1$ dziedziną funkcji może być przedział $< c, +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

19. Siatka pewnego czworościanu może być:

  a) trójkątem prostokatnym,

  b) prostokatem,

  c) kwadratem.

20. Niech $\overline{0,xyz}$ oznacza liczbę, w której x oznacza cyfrę części dziesiętnych, y – cyfrę części setnych, z – części tysięcznych. Ponadto $x \neq y \neq z$. Równanie $\overline{0,xyz} + \overline{0,zyx} = 1$ ma:

  a) dokładnie jedno rozwiązanie,

  b) co najwyżej dwa rozwiązania,

  c) co najwyżej dwa rozwiązania, w których x jest cyfrą parzystą.