XXXVI Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. Wierzchołek A kąta ostrego równoległoboku $ABCD$ połączono ze środkami K i L boków BC i CD. Wówczas
   a) trójkąt AKL może być trójkątem prostokątnym,
   b) trójkąt AKL może być trójkątem równoramiennym,
   c) trójkąty KDA i LBA są podobne.
2. Wiadomo, że $x - \frac{1}{x} = 4$, gdzie $x > 0$. Wówczas $x^2 - \frac{1}{x^2}$ jest liczbą:
   a) całkowitą,
   b) niewymierną,
   c) większą od 16.
3. Na danym odcinku a oraz na każdej jego połowie, jako na średnicach zakreślono trzy okręgi. Promień r okręgu stycznego do każdego z trzech okręgów jest:
   a) mniejszy niż $\frac{1}{4}a$ i większy niż $\frac{1}{7}a$,
   b) mniejszy niż $\frac{1}{5}a$,
   c) nie mniejszy niż $\frac{1}{6}a$.
4. Liczba $\frac{n^3-n^2+2}{n-1}$, gdzie $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ jest liczbą całkowitą dla:
   a) nieskończenie wielu wartości n,
   b) dokładnie czterech wartości n,
   c) co najmniej dwóch wartości n.
5. W pewnym trapezie równoramiennym przekątna trapezu jest prostopadła do ramienia i zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego trapezu. Wówczas:
   a) dłuższa podstawa trapezu jest dwukrotnie dłuższa od ramienia trapezu,
   b) pole trapezu wynosi $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$,
   c) kąt rozwarty trapezu jest o 60° stopni większy od kąta ostrego.

6. Dane są liczby:
$a = \sqrt{57 + 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 - 40\sqrt{2}}$
$b = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{3}$
$c = \sqrt{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7} + 1}$
$d = 2\sqrt{2}(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}})$
Wśród nich:
   a) co najmniej dwie są liczbami całkowitymi,
   b) wszystkie są liczbami nieujemnymi,
   c) co najmniej trzy są dodatnimi liczbami wymiernymi.
7. Równoległobok $ABCD$ podzielono dwoma prostymi KL i MN równoległymi do przekątnej AC na trzy figury o równych polach. Punkty M, N, K, L leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA. Wówczas:
   a) $|AB| : |MB| = \sqrt{3} : \sqrt{2}$,
   b) pole czworokąta $ACKL$ stanowi mniej niż 16% pola równoległoboku $ABCD$,
   c) $|BN| : |NC| = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) : \sqrt{2}$
8. Trzy różne okręgi o środkach A, B oraz C i promieniach odpowiednio równych a, b oraz c są parami zewnętrznie styczne, a jednocześnie styczne do pewnej prostej k. Wiadomo, że $c < b$ oraz $c < a$. Wówczas
   a) trójkąt ABC może być trójkątem prostokątnym,
   b) trójkąt ABC może być trójkątem ostrokątnym,
   c) $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$
9. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z czterech różnych kolorów, przy czym każdy kolor został wykorzystany. Zatem:
   a) zawsze istnieje prosta, której punkty są co najmniej w trzech kolorach,
   b) może istnieć prosta złożona z punktów w jednym kolorze,
   c) może istnieć kierunek, w którym każda prosta jest co najwyżej w dwóch kolorach.
10. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa ma długość ramion, a dłuższa długość przekątnej. Wówczas:
   a) przekątne tego trapezu muszą przecinać się pod kątem prostym,
   b) w trapez ten można wpisać okrąg,
   c) jeden z kątów wewnętrznych tego trapezu ma miarę większą niż $110°$.

11. Liczby x i y spełniają układ równań: Układ równań:

$$\begin{cases} y = 2(a+x) \\ y = 3(a-x) \end{cases}$$

gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Można podać taką wartość a, że:

a) $x < a < y$,

b) $x \leqslant a \leqslant y$,

c) $x > a > y$

12. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 6, ma długość 1. Wówczas:

a) promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość $3\frac{1}{4}$,

b) pole tego trójkąta jest liczbą całkowitą,

c) obwód tego trójkąta jest liczbą całkowitą.

13. Pewna liczba naturalna n w zapisie dziesiętnym zbudowana jest jedynie z cyfr 1 i 0. Jeśli do zapisu liczby wykorzystano:

a) 2^{2014} jedynek i 3^{2014} zer, to liczba n jest podzielna przez 5,

b) 33 jedynki, to liczba n może być kwadratem liczby naturalnej,

c) 33 zera, to liczba n musi być podzielna przez 10.

14. Wśród wszystkich liczb postaci $(3n-1)\cdot(3n-2)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$:

a) nie ma liczb pierwszych,

b) jest nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 7,

c) są liczby podzielne przez 6.

15. Niech n oznacza ilość wszystkich liczb naturalnych dodatnich mniejszych niż 1000, podzielnych przez 3 lub 5 lub 7. Zatem n jest liczbą :

a) większą niż 540, ale mniejszą niż 560,

b) większą niż 600,

c) liczbą o dokładnie czterech dzielnikach.

16. Punktem stałym funkcji f nazywamy taki argument x_0 należący do dziedziny funkcji, dla którego $f(x_0) = x_0$. Zatem:

    a) każda funkcja stała ma punkt stały,

    b) każda funkcja kwadratowa ma punkt stały,

    c) każdy wielomian ma punkt stały.

17. Niech $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, o ile n jest liczbą naturalną dodatnią oraz $0! = 1$.

    a) $n!$ może być kwadratem liczby naturalnej różnej od zera,

    b) liczb $n!$, które w zapisie dziesiętnym kończą się dokładnie sześcioma zerami jest dokładnie pięć,

    c) liczb $n!$, które w zapisie dziesiętnym kończą się dokładnie sześcioma zerami jest co najmniej sześć.

18. Niech $D \subset \mathbb{R}$. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją nieparzystą (tzn. jeśli $x \in D$ to $-x \in D$ oraz $f(-x) = -f(x)$), zaś funkcja $g : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją parzystą (tzn. jeśli $x \in D$ to $-x \in D$ oraz $f(-x) = f(x)$), oraz $g(x) \neq 0$ dla $x \in D$.

    Rozważmy cztery funkcje:
    $h(x) = f(x) + g(x), \quad k(x) = f(x) - g(x), \quad r(x) = f(x) \cdot g(x), \quad p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

    a) Wśród rozważanych funkcji przynajmniej dwie są funkcjami nieparzystymi.

    b) Można podać przykład takich funkcji f i g, że wszystkie cztery rozważane funkcje będą funkcjami nieparzystymi.

    c) Funkcja $w(x) = k(x) \cdot p(x)$ jest funkcją parzystą.

19. Pierwiastkami pewnego wielomianu W są wyłącznie liczby 1 oraz -1. Wówczas:

    a) wielomian jest parzystego stopnia,

    b) suma współczynników tego wielomianu jest liczbą parzystą,

    c) jeśli $W(x) = (x^2 - 1)P(x)$, to wielomian P może być trójmianem kwadratowym o dwóch różnych pierwiastkach.

20. Funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją okresową o okresie $t > 0$ wtedy, gdy dla dowolnego $x \in D$ spełnione są warunki:

    $$x - t \in D \quad \text{oraz} \quad x + t \in D$$
    $$f(x - t) = f(x) = f(x + t)$$

    Pewna funkcja f, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, jest funkcją okresową o okresie t będącym liczbą wymierną. Wówczas:

    a) funkcja f może mieć wzór $f(x) = a \sin(bx)$ dla pewnych liczb $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

    b) funkcja dana wzorem $g(x) = af(x) + b$ dla pewnych liczb $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, jest funkcją okresową o okresie t,

    c) wśród wszystkich liczb t będących okresem funkcji f zawsze można wskazać liczbę najmniejszą.