XXXVII Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. Niech $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f(x) = ax + b$. Wiadomo, że $f(a) = 2015b$. Zatem:
   a) istnieje dokładnie jedna taka funkcja,
   b) najmniejsza wartość współczynnika b to 2014,
   c) najmniejsza wartość współczynnika a to 2014.

2. Liczba:
$$2015^{2016} - 2 \cdot 2015^{2015} + 2015^{2014}$$
   jest podzielna przez:
   a) 2015,
   b) 2014,
   c) 2013.

3. Z punktu A leżącego na okręgu poprowadzono średnicę AB i cięciwę AC. Kąt pomiędzy cięciwą i średnicą ma 30^o. Styczna do okręgu w punkcie C przecina przedłużenie odcinka AB w punkcie D. Wówczas:
   a) miarą $\sphericalangle ACD$ jest równa mierze $\sphericalangle CBD$,
   b) $\triangle CBD$ jest równoramienny,
   c) $\triangle ACD$ jest równoramienny.

4. Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. We wnętrzu równoległoboku na przekątnej AC wybrano punkt K różny od M. Wtedy:
   a) pola trójkątów CKD i CKB są równe,
   b) trójkąty $\triangle AKD$ i $\triangle AKB$ są przystające,
   c) trójkąty $\triangle MKD$ i $\triangle MKB$ mają równe pola.

5. Wiadomo, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = |x + a| + |x + b|$ jest parzysta (tzn. $f(x) = f(-x)$, dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$). Liczby a i b mogą być:
   a) równe,
   b) przeciwne,
   c) nieujemne.

6. Niech $a > b > 0$, $a, b \in \mathbb{N}$. Proste o równaniach $y = x + a$ oraz $y = x + b$ przecinają osie układu współrzędnych w punktach A, B, C, D. Pole czworokąta $ABCD$ wynosi 6. Par liczb a, b spełniających warunki zadania jest:

   a) dokładnie cztery,

   b) co najwyżej dwie,

   c) dokładnie jedna.

7. Niech $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż a. Niech $k \in \mathbb{C}$. Równanie:
$$[x] + [2x] + [4x] = k$$
   ma rozwiązania dla:

   a) $k = 15$,

   b) $k = 2015$,

   c) $k = 777$.

8. Niech a będzie liczbą rzeczywistą. Wiadomo, że $[na] = n[a]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

   a) a musi być liczbą nieujemną,

   b) a musi być liczbą całkowitą,

   c) a może być liczbą wymierną.

9. Napisano 2015 różnych liczb naturalnych. Zawsze można wybrać spośród nich takie liczby, których suma jest podzielna przez:

   a) 5,

   b) 31,

   c) 45.

10. Na każdym z 64 pól szachownicy napisano jedną z liczb: $0, 1$ lub 2. Suma wszystkich napisanych liczb wynosi 33. W jednym ruchu można zamiast dowolnych dwóch liczb napisać na jednym z pól ich sumę lub różnicę, a na drugim zero. Po pewnej liczbie ruchów na szachownicy zostały same zera i liczba k. Liczbą k może być:

    a) 1,

    b) 2,

    c) 3.

11. W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej wynosi $1 : 2$. Zatem:

    a) stosunek krótszej przyprostokątnej do przeciwprostokątnej wynosi $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$,

    b) stosunek dłuższej przyprostokątnej do krótszej przyprostokątnej wynosi $\frac{\sqrt{7}+4}{3}$,

    c) stosunek sumy przyprostokątnych do przeciwprostokątnej wynosi $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

12. Na tablicy napisano 2015 znaków $+$ oraz $-$. Następnie zamieniono każde dwa sąsiadujące znaki $-$ na jeden znak $+$. Po jakimś czasie zostało na tablicy 1500 znaków $+$ i 33 samotne znaki $-$. Na początku:

    a) napisano 997 znaków $-$,

    b) było więcej znaków $-$ niż $+$,

    c) znaków $+$ było mniej niż 50.

13. W trójkącie o polu 12 jedna z wysokości ma długość 6, a druga 4. Wtedy:

    a) trzecia wysokość ma długość $d \in (3, 4>$,

    b) bok, na który jest opuszczona trzecia wysokość, ma długość większą niż 7,

    c) trójkąt musi być prostokątny.

14. Cztery kolejne boki czworokąta mają długości: $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $DA = 6$. Wówczas pole tego czworokąta jest:

    a) większe niż 20,

    b) większe niż 19, ale nie większe niż 20,

    c) nie większe niż 19.

15. Załóżmy, że wysokości pewnego trójkąta mają długości $3, 4$ i 5 cm. Zatem:

    a) pole trójkąta jest większe niż 6 cm^2,

    b) jest to trójkąt rozwartokątny,

    c) jest to trójkąt prostokątny.

16. Wiadomo, że $a + \frac{1}{a}$ jest liczbą całkowitą. Wówczas:

    a) $a - \frac{1}{a}$ jest liczbą całkowitą,
    b) $(a - \frac{1}{a})^2$ jest liczbą całkowitą,
    c) $a^4 + \frac{1}{a^4}$ jest liczbą całkowitą.

17. Niech $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f(x) = ax + b$. Wiadomo, że $f(b) = 2015a$. Wówczas:

    a) nie istnieje funkcja spełniająca warunki zadania,
    b) jest dokładnie 7 takich funkcji,
    c) a musi być liczbą parzystą.

18. Trójkąt o bokach $a \leqslant b \leqslant c$ ma pole równe 1. Wtedy:

    a) $c \geqslant \sqrt{2}$,
    b) $b \geqslant \sqrt{2}$,
    c) $a \geqslant \sqrt{2}$.

19. Suma wysokości pewnego trójkąta jest 9 razy większa od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Trójkąt ten:

    a) może być prostokątny,
    b) może mieć oś symetrii,
    c) może być różnoboczny.

20. Okrąg przechodzący przez wierzchołki A i B trójkąta ABC przecina bok AC w punkcie M, zaś bok BC w punkcie N. Wówczas:

    a) $\sphericalangle AMN$ i $\sphericalangle ABN$ mają równe miary,
    b) $\sphericalangle NAB$ i $\sphericalangle NMB$ mają równe miary,
    c) $\triangle ABC$ i $\triangle CMN$ są podobne.