XXVIII Ogólnopolski Sejmik Matematyków

Propozycje zagadnień

1. »Grafy Eulera.«

Opis: Graf Eulera odznacza się tym, że można w nim skonstruować cykl Eulera, czyli drogę, która przechodzi przez każdą jego krawędź tylko raz i wraca do punktu wyjściowego. Pierwszy raz problem poszukiwania cyklów w grafach został sformułowany przez matematyka Leonharda Eulera w roku 1736, który chciał rozwiązać zagadnienie mostów królewieckich. Mieszkańcy Królewca głowili się bowiem nad tym, czy czy można przejść kolejno przez wszystkie mosty w ich mieście tak, żeby każdy przekroczyć tylko raz i wrócić do miejsca, z którego się wyruszyło. Czym charakteryzują się grafy Eulera? Czy istnieje algorytm pozwalający na odszukanie cyklu Eulera w grafie eulerowskim? Czy grafy Eulera mają jakiś związek z grafami Hamiltona?

Literatura:

[1] J.A.Bondy and U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications,

[2] J.L.Gross and J.Yellen, Handbook of Graph Theory,

[3] K.Ross and C.Wright, Matematyka dyskretna.

2. »Na ile sposobów?«

Opis: W wierzchołkach dwudziestościanu foremnego rozmieszczamy dwie kule czerwone, jedna biała i jedna niebieska. Dwa rozmieszczenia uważamy za takie same, jeśli jedno z drugiego powstaje przez pewien obrót dwudziestościanu. Na ile różnych sposobów możemy to zrobić? Odpowiedz na to, jak i wiele innych ciekawych pytań, daje lemat Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a i jego główny wniosek – twierdzenie Pólyi. Praca powinna zawierać omówienie powyższego zagadnienia; mile widziane własne pomysły i ich samodzielne rozwiązania.

Literatura:

[1] M.Klin, R.Pöschel, K.Rosenbaum,
Algebra stosowana dla matematyków i informatyków, WNT, Warszawa 1992

[2] W.Lipski, W.Marek, Analiza kombinatoryczna, PWN Warszawa 1986.

3. »Równania Diofantyczne«

Opis: Tytułowe równania wzięły swą nazwę od starożytnego matematyka greckiego Diofantosa żyjącego w III wieku n.e. Są to równania algebraiczne, których rozwiązań szukamy wśród liczb całkowitych bądź naturalnych. Bodaj najbardziej znanym przykładem takiego równania jest $x^n + y^n = z^n$, które wiąże się ze słynnym Wielkim Twierdzeniem Fermata orzekającym, że dla $n \geqslant 3$ nie istnieją żadne dodatnie liczby całkowite x, y, z spełniające to równanie. Francuski matematyk i prawnik Pierre de Fermat zanotował swoje twierdzenie w 1637 r. na marginesie książki *Arithmetica* autorstwa Diofantosa, informując jednocześnie, że margines jest zbyt wąski, aby zmieścić znaleziony przez samego Fermata zadziwiający dowód. Zapewne nigdy nie dowiemy się czy rzeczywiście Fermat dysponował poprawnym dowodem; wiemy za to na pewno, że twierdzenie zostało wykazane w 1994 r. przez angielskiego matematyka Andrew Wilesa.

Oprócz tak trudnych problemów jak Wielkie Twierdzenie Fermata, równania diofantyczne występują często jako problemy na różnorodnych konkursach i olimpiadach matematycznych. Celem proponowanej pracy byłoby opisanie wybranych przez siebie kilku metod podejścia do rozwiązywania równań diofantycznych oraz wsparcie ich interesującymi przykładami. A przykładów jest wiele. Wyszukać je można wśród zadań olimpijskich np. na stronie internetowej [6], czy też w zbiorze zadań W. Sierpińskiego [5].

W zależności od preferencji oraz przygotowania matematycznego można skupić się na takich aspektach teorii równań diofantycznych jak:

- algorytm Euklidesa i równanie liniowe (zobacz np. [2, §1.3]),
- równania drugiego stopnia, w szczególności równanie Pella $x2 - dy2 = 1$ (zobacz np. [2, §3.1]),
- Wielkie Twierdzenie Fermata dla niektórych wykładników, np. $n = 3$, $n = 4$ (zobacz np. [4]),
- związek pomiędzy równaniem Pella a ułamkami łańcuchowymi (zobacz np. [2, §10.1]),
- zastosowanie teorii pierścieni z jednoznacznością rozkładu (zobacz np. [1, rozdział IX, §1-7]
  oraz [3, §3.5.7]).

Niektóre z zasygnalizowanych tematów wymagają zapoznania się z elementami pewnych teorii (pierścienie, liczby zespolone, teoria podzielności i liczby całkowite Gaussa). Niemniej nawet przy podejściu całkowicie elementarnym bogactwo zadań związanych z równaniami diofantycznymi, które pojawiały się na różnorodnych olimpiadach, niewątpliwie pozwala na napisanie interesującej pracy.

Literatura:

[1] Andrzej Białynicki-Birula, *Algebra*, Biblioteka Matematyczna 40, PWN, Warszawa 1976.

[2] Władysław Narkiewicz, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 2003.

[3] Jerzy Rutkowski, *Algebra abstrakcyjna w zadaniach*, PWN, Warszawa 2002

[4] Wacław Sierpiński, *Teoria liczb*, Monografie Matematyczne 19, Warszawa-Wrocław 1950

[5] Wacław Sierpiński, *250 zadań z elementarnej teorii liczb*, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1987

[6] Strona internetowa Olimpiady Matematycznej: `http://www.om.edu.pl`

4. »Liczby zespolone w geometrii«

Opis: Liczby zespolone pojawiły się w matematyce w XVI wieku za sprawą włoskich matematyków Girolamo Cardano i Niccolò Tartaglii, którzy choć nie definiowali ich *explicite*, używali pierwiastkowania liczb ujemnych do rozwiązywania równań stopnia trzeciego. Za »ojca liczb zespolonych«uznawany jest natomiast włoski inżynier Rafael Bombelli, który w swych obliczeniach traktował jednostkę urojoną jako pełnoprawny obiekt matematyczny. Na powszechną akceptację liczb zespolonych w środowisku matematycznym czekać trzeba było do początku XIX wieku. Wtedy to aksjomatyczną definicję tych liczb i działań na nich, wraz z ich interpretacją geometryczną, rozpropagował Carl Friedrich Gauss. Liczby zespolone były ujmowane geometrycznie nieco wcześniej przez duńskiego matematyka Caspara Wessela oraz szwajcarskiego matematyka Jeana-Roberta Arganda. Mówiąc dziś o płaszczyźnie zespolonej często nazywamy ją właśnie płaszczyzną Gaussa bądź płaszczyzną Arganda.

Elegancka interpretacja geometryczna liczb zespolonych daje nam ciekawe podejście do wielu problemów geometrii płaskiej. W artykule [1] podany jest szereg przykładów zadań olimpijskich z geometrii, do których rozwiązania użyć można własnie liczb zespolonych. Celem pracy byłoby wykazanie, za pomocą stosownych przykładów, jak wielkie możliwości kryją się w geometrycznych zastosowaniach rachunku na liczbach zespolonych. Można posłużyć się przykładami z zadań olimpijskich zawartych w [1] bądź wyszukanych np. na stronie internetowej [4]. Można także skupić się na »zespolonych«metodach dowodzenia klasycznych twierdzeń geometrii takich jak np. twierdzenie Pascala, twierdzenie Brokarda czy nierówność Ptolemeusza. Stosowne będzie także zawarcie wybranych informacji na temat tego jak tłumaczą się klasyczne relacje geometryczne (równoległość i prostopadłość odcinków, przystawanie i podobieństwo trójkątów) na relacje pomiędzy liczbami zespolonymi. W zależności od narzędzi stosowanych w rozwiązaniach wybranych przez siebie przykładów, można wyprowadzić »zespolone«formuły na podstawowe przekształcenia geometryczne (symetria, obrót, inwersja). Bardzo interesujące omówienie tej problematyki znaleźć można w książce [3].

Elementarny wstęp do teorii liczb zespolonych można odnaleźć w wielu podręcznikach. Można np. sięgnąć do rozdziału I książki [2].

Literatura:

[1] Marko Radovanović, *Complex numbers in geometry*,
The IMO Compendium Group, `http://www.imomath.com/tekstkut/cnum_mr.pdf`

[2] Tadeusz Trajdos, *Matematyka* (część III), Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1993.

[3] Witold Więsław, *Liczby i geometria*, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1996.

[4] Strona internetowa Olimpiady Matematycznej: `http://www.om.edu.pl`

5. »Kłamstwa, wierutne kłamstwa – STATYSTYKA!«

Opis: Celem pracy jest uzasadnienie (a może obalenie?) powyższego stwierdzenia. Autor pracy może spróbować odpowiedzieć na pytania dlaczego różne opracowania tego samego zbioru danych mogą prowadzić do różnych wniosków, skąd wynikają różnice i czy można stwierdzić, które wnioski są zgodne z rzeczywistością. Praca na ten temat może zawierać opracowanie samodzielnie wybranych zagadnień metodami statystycznymi i wyciągnięcie na ich podstawie wniosków. Dane mogą dotyczyć np. medycyny, finansów, meteorologii czy też zupełnie innych przykładów z własnego podwórka. Ważne, aby w każdym przypadku podać źródło danych i omówić metodę stosowaną w ich opracowaniu.

Literatura:

[1] C.Radhakrishna Rao, Statystyka i prawda, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1994

[2] Wybrane artykuły i opracowania,
a także dalsza literatura dostępne np. na stronie firmy StatSoft `http://www.statsoft.pl/`

6. »Nierówności między średnimi«

Opis: Najbardziej znaną i najczęściej stosowaną średnią jest średnia arytmetyczna. Jednak istnieją jeszcze inne średnie: średnia geometryczna, harmoniczna, potęgowa, wykładnicza, logarytmiczna i wiele innych. Między tymi średnimi można znaleźć dużo ciekawych związków, które mogłyby być treścią pracy poświęconej temu zagadnieniu. W szczególności interesujące są nierówności między wybranymi średnimi oraz metody ich dowodzenia.

Literatura:

[1] O.Bagdasar, Inequalities and Applications,
dostępna w bazie RGMIA pod adresem `http://www.staff.vu.edu.au/RGMIA/monographs.asp`

[2] P.S.Bullen, Handbook of Means and Their Inequalities,
Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers (2003).

[3] L.Kourliandtchik, Kraina nierówności, Aksjomat Toruń (2006).

[4] D.S.Mitrinovic, Elementarne nierówności, PWN (1972).

[5] Gh.Toader, S.Toader, Greek Means and the Arithmetic-Geometric Mean, dostępna w bazie RGMIA pod adresem `http://www.staff.vu.edu.au/RGMIA/monographs.asp`

7. »Zbiory Julii«

Opis: Dla zadanej funkcji zespolonej $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ odpowiadający jej zbiór Fatou można w uproszczeniu (czyli nie do końca poprawnie) zdefiniować jako zbiór tych punktów $z \in \mathbb{C}$, dla których ciąg $z, f(z), f(f(z)), \ldots$ ma podciąg zbieżny lub rozbieżny. Zbiór Julii jest dopełnieniem zbioru Fatou. Przykładowo dla funkcji $f(z) = z^2$ zbiór Julii jest okręgiem jednostkowym, lecz już dla funkcji $f(z) = z^2 + c$, gdzie $c \in \mathbb{C}$ jest ustaloną stałą, zbiór ten może być dużo bardziej skomplikowany. Pierre Fatou i Gaston Julia zdefiniowali swoje zbiory około 1920 roku. Zobaczyć je mogliśmy dopiero 50 lat później za sprawą Benoita Mandelbrota. Jak wyglądają zbiory Julii dla wybranych funkcji? Jaki jest związek pomiędzy zbiorem Julii, a zbiorem Mandelbrota?

Literatura:

[1] J.Kudrewicz, Fraktale i chaos, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1993,

[2] F.Leja, Funkcje zespolone, PWN, Warszawa 1976,

[3] H.O.Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, Granice chaosu, fraktale, część II, PWN, Warszawa 2002

8. »Liczba e«

Opis: Liczba e jest jedną z najważniejszych stałych matematycznych. Jej wartość to około 2,718282. Jak obliczyć tę wartość? Czemu logarytm o podstawie e nazywamy logarytmem naturalnym? Jak odkryto tę liczbę i do czego jest nam ona potrzebna? Jakie są jej własności?

Literatura:

[1] R.Courant, H.Robbins, Co to jest matematyka?, PWN, Warszawa 1959,

[2] G.M. Fichtencholz, Rachunek różniczkowy i całkowy (t. I, II), PWN, Warszawa 1976.

[3] B.Miś, Tajemnicza liczba e i inne sekrety matematyki, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1989.

[4] I.Stewart, Oswajanie nieskończoności. Historia Matematyki, Prószyński i S-ka, Warszawa 2009

9. »Algorytmy grafowe - co jest proste, co jest trudne.«

Opis: Które problemy w grafach (przykładowo znajdowanie cykli, najkrótsze ścieżki, problem komiwojażera, przeszukiwanie grafu, maksymalny przepływ w sieci, kolorowanie grafu) są łatwe obliczeniowo, a które trudne? Przykłady algorytmów. Próby przybliżonych rozwiązań problemów trudnych.

Literatura:

[1] A.V.Aho, J.E.Hopcroft, J.D.Ullman, Projektowanie i analiza algorytmów komputerowych, PWN, Warszawa 1983,

[2] L.Banachowski, K. Diks, W.Rytter, Algorytmy i struktury danych, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.

[3] T.H.Cormen, C.E.Leiserson, R.L.Rivest, Wprowadzenie do algorytmów, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997,

[4] M.M.Sysło, N.Deo, J.E.Kowalik, Algorytmy optymalizacji dyskretnej, PWN, Warszawa 1999.